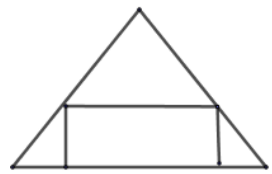
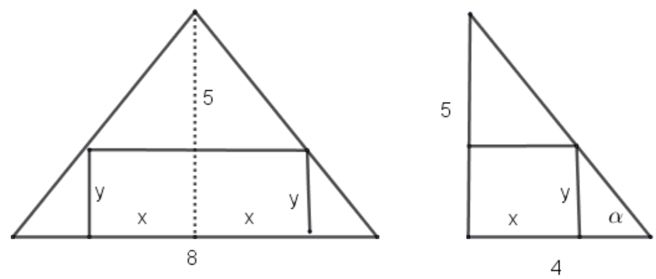
Opción A

Ejercicio 1 opción A, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

[2,5 puntos] Considera un triángulo isósceles en el que el lado desigual mide 8 cm y la altura correspondiente mide 5 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en dicho triángulo (ver figura).



Solución



Es un problema de optimización.

La función a maximizar es Área = A(x,y) = 2x.y

Relación entre variables: tag(α) = 5/4 (Triángulo grande) = y/(4 – x) [triángulo pequeño], de donde igualando obtenemos y/(4 – x) = 5/4, por tanto y = (20 –5x)/4, luego A(x) = 2x·y = 2x·(20 – 5x)/4 = (40x – 10x²)/4.

Derivando A '(x) = (1/4)·(40 – 20x)
De A '(x) = 0, tenemos 40 – 20x = 0, es decir x = 2.

Luego el rectángulo tiene de base 2x = 2·(2) **= 4 cm**. **y de altura y =** (20 – 5(2))/4 = 10/4 **= 2'5 cm**.

Veamos que x = 2 es un máximo de la función A(x), viendo que A''(2) < 0
A ''(x) = (1/4)·(–20) = -5 < 0, A''(2) = -5 < 0, **luego x = 2 es un máximo**.

Ejercicio 2 opción A, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Siendo a > 1, considera el rectángulo de vértices A(1, 0), B(1, 1), C(a, 1) y D(a, 0). La gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x \neq 0$ divide al rectángulo anterior en dos recintos.

a) [0'5 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f y del rectángulo descrito.
b) [2 puntos] Determina el valor de "a" para el que los dos recintos descritos tienen igual área.

Solución

Siendo a > 1, considera el rectángulo de vértices A(1, 0), B(1, 1), C(a, 1) y D(a, 0). La gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x \neq 0$ divide al rectángulo anterior en dos recintos.

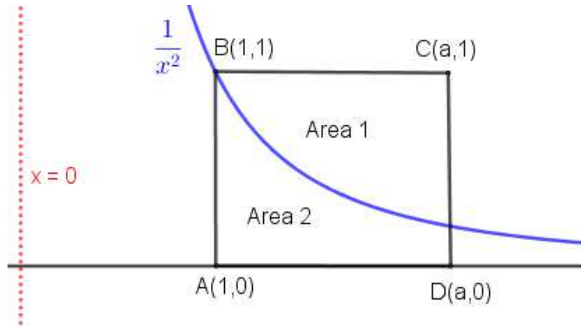
a)
Haz un esbozo de la gráfica de f y del rectángulo descrito.

La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ no está definida en x = 0 (es una asíntota vertical). Vemos que pasa por el punto (1, 1) y por el punto (a, 1/a²)

Como $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$, la recta x = 0 es una asíntota vertical de la gráfica de f, y a la derecha de x = 0, está en +∞.

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\infty^+} = 0^+$, la recta y = 0 es una asíntota horizontal de la gráfica en +∞, y la función está por encima de la recta y = 0 en + ∞.

Teniendo en cuenta lo anterior en esbozo de la gráfica de f y del rectángulo es:



b)
Determina el valor de "a" para el que los dos recintos descritos tienen igual área.

Área 1 = Área 2

Área 1 = área rectángulo – área bajo f entre 1 y a = $(a - 1)\cdot 1 - \int_1^a \frac{1}{x^2}dx = (a - 1)\cdot 1 - \int_1^a x^{-2}dx =$

$= a - 1 - \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^a = a - 1 - \left[\frac{-1}{x}\right]_1^a = a - 1 - \left(\frac{-1}{a} - \frac{-1}{1}\right) = a - 1 + 1/a - 1 = (a + 1/a - 2)\ u^2$

Área 2 = área bajo f entre 1 y a = $\int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \int_1^a x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^a = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^a = \left(\frac{-1}{a} - \frac{-1}{1}\right) = (-1/a + 1)\ u^2$.

Igualando: $a + 1/a - 2 = -1/a + 1 \rightarrow a^2 + 1 - 2a = -1 + a \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$, de donde a = 1 y a = 2. **Como nos dicen que a > 1, la solución es a = 2.**

Ejercicio 3 opción A, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a) [1'5 puntos] Discute el sistema dado por AX = mX según los valores del parámetro m.
b) [0'5 puntos] Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.
c) [05 puntos] Para m = 3 resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que x + y + z = 3.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a)
Discute el sistema dado por AX = mX según los valores del parámetro m.

De AX = mX tenemos $AX - mX = O_{3x1} = (A - m\cdot I_3) = O_{3x1}$. Tenemos un sistema homogéneo.

Sea la matriz $C = A - m\cdot I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - m\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \end{pmatrix}$.

Tenemos $\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} 2-m & 0 & 0 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 0 & 3-m \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (2-m)\cdot\begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ 0 & 3-m \end{vmatrix} = (2-m)\cdot((2-m)\cdot(3-m) - 0) =$

$= (2-m)\cdot(2-m)\cdot(3-m)$.
De det(C) = 0, tenemos $(2-m)\cdot(2-m)\cdot(3-m) = 0$, es decir m = 2 (doble) y m = 3.

Si m ≠ 2 y m ≠ 3, det(C) ≠ 0, y el sistema al ser homogéneo tiene solución única, la trivial (x, y, z)= = (0, 0, 0).

Si m = 2, tenemos $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{F_3-F_1} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, como la matriz C tiene una sola fila con números distintos de cero, **tenemos rango(C) = 1 < número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución** (en nuestro caso infinita).

Si m = 3, tenemos $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, como la matriz escalonada C tiene dos filas con números distintos de cero, **tenemos rango(C) = 2 < número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución** (en nuestro caso infinita).

b)

Da la solución del sistema en los casos en que es compatible determinado.

Hemos visto en el apartado (a) que **si m ≠ 2 y m ≠ 3, det(C) ≠ 0, y el sistema al ser homogéneo tiene solución única, la trivial (x, y, z) = (0, 0, 0).**

c)

Para m = 3 resuelve el sistema y halla, si es posible, una solución en la que x + y + z = 3.

Para **m = 3,** tenemos $C \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego $C \cdot X = O_{3x1} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir $\begin{cases} -x = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$,

tomando z = μ, tenemos y = μ, y **la solución del sistema es (x,y,z) = (0, μ, μ) con μ ∈ R.** (depende de un solo parámetro)

Nos preguntan si es posible, una solución en la que x + y + z = 3

Como la solución en este caso es **(x,y,z) = (0, μ, μ),** tenemos (0) + (μ) + (μ) = 3, es decir 2μ = 3**, luego μ = 3/2 y la solución sería (x,y,z) = (0, 3/2, 3/2).**

Ejercicio 4 opción A, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Se sabe que los puntos A(-1, 2, 6) y B(1, 4, -2) son simétricos respecto de un plano π.

a) [0’75 puntos] Calcula la distancia de A a π.

b) [1’75 puntos] Determina la ecuación general del plano π.

Solución

Se sabe que los puntos A(-1, 2, 6) y B(1, 4, -2) son simétricos respecto de un plano π.

a)

Calcula la distancia de A a π.

Si A y B son simétricos respecto a un plano π, dicho plano es el plano mediador del segmento AB, es decir el plano π pasa por el punto medio del segmento AB, por tanto **d(A, π) =** (1/2)·módulo del vector **AB** =

= (1/2)·|| **AB** || = (1/2)·√($2^2 + 2^2 + 8^2$) u^1 **= (1/2)·√(72) u^1.**

AB = (1, 4, -2) - (-1, 2, 6) = (2, 2, -8)

b)

Determina la ecuación general del plano π.

El plano π que nos piden pasa por el punto medio del segmento AB y tiene por vector normal el **AB**, es decir nos piden el plano mediador del segmento AB.

Punto medio de AB es C((-1 + 1)/2, (2 + 4)/2, (6 - 2)/2) = C(0, 3, 2).

La ecuación del plano es **CX•AB** = 0, donde • es el producto escalar.

La ecuación del plano es **π ≡ CX•AB** = 0 = (x – 0, y – 3, z – 2) •(2, 2, -8) = **2x + 2y – 8z + 10 = 0.** Simplificando tenemos **π ≡ x + y – 4z + 5 = 0**

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = x + x\cdot e^{-x}$.

a) [1’25 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta x – y + 1 = 0.

b) [1'25 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Solución

Sea f : R $\rightarrow$ R la función definida por $f(x) = x + x\cdot e^{-x}$.

a)

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta x – y + 1 = 0.

Sabemos que las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

De x – y + 1 = 0 tenemos y = x + 1, por tanto la pendiente de esta recta tangente es y ' = 1.

La pendiente genérica a la gráfica de *f* es $f'(x) = (x + x\cdot e^{-x})' = 1 + 1\cdot e^{-x} + x\cdot e^{-x}\cdot(-1) = 1 + e^{-x} - x\cdot e^{-x}$.

Igualamos pendientes: $1 = 1 + e^{-x} - x\cdot e^{-x} \rightarrow 0 = e^{-x}\cdot(1 - x)$. Como la exponencial no se anula nunca, tenemos 1 – x = 0, de donde x = 1.

Me piden la recta tangente en x = 1.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1 es "y - f(1) = f '(1)·(x - 1)".

Hemos visto que f '(1) = 1.

De $f(x) = x + x\cdot e^{-x} \rightarrow f(1) = 1 + 1\cdot e^{-1} = 1 + 1/e = (e + 1)/e$.

La recta tangente pedida es y – (e + 1)/e = 1·(x - 1).

b)

Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

$f(x) = x + x\cdot e^{-x} = x + \dfrac{x}{e^{+x}}$

Como esta función no se anula en el denominador, **no tiene asíntotas verticales**.

Veamos las asíntotas horizontales (A.H.).

Recordamos la Regla de L'Hôpital (L'H): Si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ y existe $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla de L'Hôpital también sirve para $\frac{\infty}{\infty}$, y cuando $x \to \infty$.

Calculamos primero $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right) = \left\{\frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty};\ \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

Como $\lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{x}{e^x}\right) = +\infty + 0^+ = +\infty$, la gráfica de f **no tiene A.H. en +∞.**

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x - x\cdot e^{-(-x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x - x\cdot e^{x}\right) = -\infty - \infty\cdot(+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$, la gráfica de f **no tiene A.H. en -∞.**

Veamos si tiene asíntotas oblicuas (A.H.) de la forma y = mx + n con $m = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ y $n = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - mx\right)$

Como $m = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{e^{+x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{+\infty}\right) = (1 + 0) = 1$, y

$n = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{x}{e^x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{+x}}\right) = 0$ (este límite lo hemos calculado antes), **la recta y = 1·x + 0 = x es asíntota oblicua de la gráfica de f en + ∞.**

Como $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x - x\cdot e^{-(-x)}}{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + e^x\right) = 1 + \infty = +\infty$, la gráfica de f **no tiene A.O. en -∞.**

Como $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - A.O.\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{x}{e^x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right) = 0^+$, la gráfica de f está por encima de la A.O. y = x en +∞.

Ejercicio 2 opción B, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

[2,5 puntos] Calcula $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^x}dx$ dx donde ln denota logaritmo neperiano (sugerencia t = e^x).

Solución

Calcula $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^x}dx$ dx donde ln denota logaritmo neperiano (sugerencia t = e^x).

Calculamos primero la integral indefinida

$$I = \int \frac{1}{1+e^x}dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \Leftrightarrow x = \ln(t) \\ dx = \dfrac{dt}{t} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t\cdot(1+t)} = \int \frac{A\cdot dt}{t} + \int \frac{B\cdot dt}{t+1} = A\ln|t| + B\ln|t+1| + K$$

Calculamos A y B.

De $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t)}{t\cdot(t+1)}$, igualando numeradores tenemos: 1 = A(t+1) + B(t).

De t = 0 $\rightarrow$ 1 = A.
De t = -1 $\rightarrow$ 1 = B(-1) = -B, luego B = -1.

Luego $I = \int \frac{1}{1+e^x}dx = 1\cdot\ln|t| - 1\cdot\ln|t+1| + K = \left\{ \begin{array}{l} \text{Quito cambio} \\ e^x = t \end{array} \right\} = \ln|e^x| - \ln|e^x + 1| + K = x - \ln(e^x + 1) + K$

Por tanto $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^x}dx = \left[x - \ln(e^x + 1) \right]_0^{\ln(2)} = \left(\ln(2) - \ln(e^{\ln(2)} + 1)\right) - \left(0 - \ln(e^0 + 1)\right) =$

$= \left(\ln(2) - \ln(2+1)\right) - \left(0 - \ln(1+1)\right) = \ln(2) - \ln(3) + \ln(2) = 2\cdot\ln(2) - \ln(3) = \ln(2^2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

Ejercicio 3 opción B, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} x - z = m \\ my + 3z = 1 \\ 4x + y - mz = 5 \end{array} \right.$

a) [1,5 puntos] Discútelo según los valores del parámetro m.
b) [1 punto] Para m = 1 resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea x = z.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} x - z = m \\ my + 3z = 1 \\ 4x + y - mz = 5 \end{array} \right.$

a)
Discútelo según los valores del parámetro m.

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & m \\ 0 & m & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -m & 5 \end{pmatrix}$.

En A, $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix}_{C_3 + C_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & 4-m \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= 1\cdot(m\cdot(4-m) - 3) = -m^2 + 4m - 3$

De det(A) = 0 tenemos $m^2 - 4m + 3 = 0$, por tanto $m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$, luego m = 1 y m = 3.

Si **$m \neq 1$ y $m \neq 3$**, tenemos **rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas, sistema compatible y determinado y tiene solución única**.

Si **m = 1**, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2**

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}_{C_3 - F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= 1\cdot(1 – 1) = 0$, tenemos **rango(A*) = 2**.

Por el Teorema de Rouche **, como rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas, sistema compatible e indeterminado y tiene más de una solución (infinitas en nuestro caso)**.

Si **m = 3**, tenemos A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, matriz ampliada A* = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$, tenemos **rango(A) = 2.**

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}_{C_3 - 3\cdot F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -7 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= 1\cdot(-21 - 1) = -22 \neq 0$, tenemos **rango(A*) = 3**.

Por el Teorema de Rouche**, como rango(A) = 2 ≠ rango(A*), el sistema es incompatible y no tiene solución.**

b)

Para m = 1 resuelve el sistema y encuentra, si es posible, una solución para la que sea x = z.

Hemos visto en el apartado (a) que si m = 1, *rango(A) = rango(A*) = 2* < número de incógnitas, y *el sistema era compatible e indeterminado y tenía infinitas soluciones*

Como rango = 2, tomamos dos ecuaciones (1ª y 2ª, que son las que he utilizado para obtener el menor de orden 2 de A distinto de cero) y dos incógnitas principales:

$\begin{cases} x \quad - z = 1 \\ \quad y + 3z = 1 \end{cases}$, tomando $z = b \in$ R tenemos $x = 1 + b$ e $y = 1 - 3b$, la **solución del sistema para m = 1 es: (x,y,z) = (1 + b, 1 - 3b, b)** con $b \in$ R.

Nos dicen, en este caso, si hay una solución para la que sea x = z. Si fuese posible tendríamos 1 + b = b, **de donde 1 = 0, lo cual es absurdo** luego **no hay solución para la que sea x = z**.

Ejercicio 4 opción B, Suplente Septiembre de 2018 (modelo 5)

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ \quad z = 2 \end{cases}$.

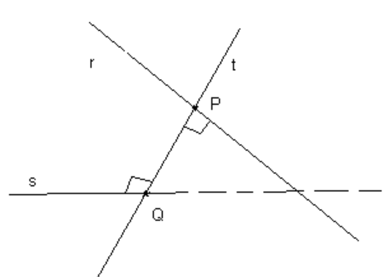
a) [1,75 puntos] Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.
b) [0,75 puntos] Calcula la distancia entre las rectas dadas.

Solución

a) y b)

Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s, y la distancia entre ellas

Recordamos que la distancia entre dos rectas que se cruzan r(A;**u**) y s(B;**v**) es la mínima distancia entre ellas. Es decir la distancia entre los puntos de corte P y Q de la recta perpendicular a ambas y que las corta. (Por este método podemos calcular la recta perpendicular a dos rectas y que las corte)



Vamos a calcular los puntos P de “r” y Q de “s”, que se encuentran a la mínima distancia, que son los puntos

de corte de la recta perpendicular común con dichas rectas.
Ponemos ambas recta en paramétricas con un parámetro distinto
De la recta r(A;**u**) tomamos un punto genérico P (depende del parámetro t)
De la recta s(B;**v**) tomamos un punto genérico Q (depende del parámetro λ)
El vector **PQ** tiene que ser perpendicular al vector director **u** de “r” y al vector director **v** de “s”, a la vez, es decir sus productos escalares tienen que ser cero:
PQ•u = 0
PQ•v = 0. Resolvemos el sistema.
Esto es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (λ y t), al resolverlo obtenemos λ y t.
Entrando en el punto genérico P con el valor de λ, obtenemos el punto P determinado.
Entrando en el punto genérico Q con el valor de t, obtenemos el punto Q determinado.
La recta pedida “t” es la que pasa por los puntos P y Q, es decir t(P;**PQ**)

De esta construcción, tenemos la definición de la distancia entre dos rectas que se cruzan, puesto que los puntos P y Q son los que se encuentran a mínima distancia entre ellas.
Calculados los punto P y Q anteriores tenemos d(r;s) = d(P;Q) = **||PQ||**

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2 \end{cases}$.

Un punto A de “r” es A(0,1,0) y un vector director es **u** = (2,0,0).
Un punto B de “s” es B(0,2,2) y un vector director es **v** = (1,-1,0).

De la recta r(A;**u**) tomamos un punto genérico P(x,y,z) = P(2t, 1, 0)
De la recta s(B;**v**) tomamos un punto genérico Q(x,y,z) = Q(λ, 2 - λ, 2)

El vector **PQ** tiene que ser perpendicular al vector director de “r” **u** y al vector director de “s” **v** a la vez, es decir su producto escalar (•) tiene que ser cero:
PQ = (λ - 2t, 1 - λ, 0)
PQ•u = 0 = (λ - 2t, 1 - λ, 0)•(2,0,0) = 0 = 2λ - 4t = 0 $\rightarrow$ λ = 2t.
PQ•v = 0 = (λ - 2t, 1 - λ, 0)•(-1,1,0) = 0 = λ - 2t - 1 + λ = 2λ - 2t - 1 = 0. Sustituyendo tenemos
2(2t) - 2t - 1 = 0 $\rightarrow$ 2t = 1, de donde t = 1/2 y λ = 2(1/2) = 1

Ya tenemos los valores de “t” y “λ”.
Entrando en el punto genérico P con el valor de t = 1/2, obtenemos el punto P determinado que es P(2(1/2), 1, 0) = P(1, 1, 0)

Entrando en el punto genérico Q con el valor de λ = 1, obtenemos el punto Q determinado que es Q((1), 2 - (1), 2) = Q(1, 1, 2)

La recta perpendicular a ambas pedida “t” es la que pasa por los punto P y Q, es decir t(Q;**PQ**)

Q(1, 1, 2)
PQ = (1 - 1, 1 - 1, 2 - 0) = (0, 0, 2).

La recta pedida es t ≡ (x,y,z) = (1, 1, 2) + δ(0, 0, 2) con $\delta \in$ R.

Calculamos la distancia entre “r” y “s”

Por la construcción los puntos P y Q son los que están a la mínima distancia entre ellas, es decir los del corte perpendicular de la recta “t” con ambas rectas, luego la distancia entre las rectas “r” y “s” es:

d(r;s) = ||QP|| = $\sqrt{(0)^2+(0)^2+(2)^2}\ u^1$ **= 2 u^1.**